El platonismo es consistente

Jesús Hernando Pérez

Profesor Universidad Sergio Arboleda

Bogotá D.C, Colombia

smogam@gmail.com

Resumen

Un imaginario bastante difundido identifica la matemática aplicada con el uso de las teorias matemáticas en ambitos relacionados con la ingenieria o con actividades académicas como la física y la economía. Muy rara vez se incluye a la filosofía en tanto que lugar en el cual ciertas teorias matemáticas encuentran un entorno extraordinariamente acogedor. Sin embargo, la filosofía ofrece numerosas oportunidades de relación con la matemática; tal es el caso que pretendemos ejemplificar en este artículo.

No es ninguna novedad el gran afecto que sentía Platón por el conocimiento matemático y por todos aquellos que tenían a esta disciplina en una alta estima. De hecho, varios diálogos platónicos, como el Teeteto, estan dedicados a importantes matemáticos que fueron sus mentores o discípulos. Mas importante es el siguiente hecho: un gran número de matemáticos, el 90 % aproximadamente, se declaran platonicos al momento de adoptar una metafísica para las entidades matemáticas. Lo que estudiamos en este trabajo justifica "lógicamente" esta actitud tan generalizada entre los matemáticos; aunque como veremos, también son posibles, lógicamente interpretaciones no platónicas.

Una aclaración importante, antes de iniciar la presentación del tema, es la siguiente: el apelativo "platonismo" tiene connotaciones muy diversas. Para nuestro caso con esta expresión nos referiremos al punto de vista que acepta como fundamento metafísico la teoria de las ideas de Platón. En este sentido las entidades matemáticas como "cero", "uno", "circunferencia", "grupo", "anillo", etc. son "reales", existen independientemente de cualquier tipo de "mente" o de entidad que se las represente; por su parte, los objetos físicos serían "nombres" o accidentes de estos objetos ideales. Queda claro, entonces, que con el sustantivo "platonismo" no hacemos referencias a componentes importantes de la teoría de Platón como es el caso de todo aquello que tiene que ver con la política.

1. Nociones básicas sobre la teoría de categorías

La Teoria de Categorias apareció, aproximadamente, en la década de 1940, años en los cuales Samuel Eilenberg y Saunders Mailane introdujeron los conceptos básicos de esta teoría cuyos desarrollos tan importantes como inesperados han permitido construir una nueva filosofía de las matemáticas que tiene como uno de los méritos más importantes, según lo ha explicitado muy claramente Joachim Lambeck, el de unificar los diferentes enfoques filosóficos sobre nuestra disciplina. Gracias a la teoría de categorias, el platonismo, el logicismo, el formalismo y el intuicionismo, aparecen como variantes de una forma de ver las matemáticas fundamentadas en las nociones básicas de esta teoría tan especial que pasaremos a describir a continuación.

En una categoría hay dos "tipos" de entidades: estructuras (objetos, nodos) y morfismos (flechas, lados). Estas entidades satisfacen los siguientes axiomas:

(C1) Cada flecha α determina univocamente dos objetos (que pueden ser el mismo objeto) el dominio o fuente, denotado $F(\alpha)$ y el codominio o meta denominado $M(\alpha)$. Este axioma permite representar las flechas así

$$F(\alpha) \xrightarrow{\alpha} F(\beta)$$

(C2) Si α,β por flechas y si $M(\alpha) = F(\beta)$ entonces, existe una única flecha, denotada $\beta \circ \alpha$ y denominada "la compuesta de β con α" y tal que

$$F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha),$$

$$M(\beta \circ \alpha) = M(\beta).$$

Este axioma se representa así

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\beta\circ\alpha"'] & \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet \end{tikzcd}$$

(C3) Si α, β, γ son flechas tales que $M(\alpha) = F(\beta)$ y $M(\beta) = F(\gamma)$, entonces,

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

Este axioma se representa así

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\beta\circ\alpha"'] \arrow[rrr, bend left=60, "(\gamma\circ\beta)\circ\alpha)"] \arrow[rrr, bend right=60, "\gamma\circ(\beta\circ\alpha)"'] & \bullet \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend left, "\gamma\circ\beta"] & \bullet \arrow[r, "\gamma"] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\alpha \circ \beta)$$

(C4) Cada objeto A determina univocamente una flecha denotada id_A y tal que

i. $F(id_A) = A = M(id_A)$

ii. Si α es una flecha de fuente A entonces $\alpha \circ id_A = \alpha$.

iii. Si β es una flecha de meta A, entonces $id_A \circ \beta = \beta$.

Este axioma se representa diagramaticamente así

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\alpha"] & \bullet_A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "\beta"] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$\alpha \circ id_A = \alpha \qquad id_A \circ \beta = \beta.$$

Entre los especialistas, explícita o implícitamente, son frecuentes las siquientes consignas.

Consigna (1). Agrupense las estructuras matemáticas en categorías.

Por ejemplo, considerando la totalidad de los grupos como una sola entidad, se forma una categoria en la cual los modos son los grupos y los lados son los homomorfismos entre grupos.

Consigna (2). Vease cada estructura matemática como una categoria.

Por ejemplo el conjunto de los números naturales con la adición usual entre números naturales, es una estructura que se denota $(\mathbb{N}, +)$. Esta estructura puede verse como una categoria con un solo nodo y cada número como un lado. Aquí la composición coincide con la adición.

Siguiendo estas dos consignas es facil encontrar ejemplos de categorías, tantos como se quiera.

Naturalmente, el ejemplo básico es el siguiente: la categoria de los conjuntos, denotada

Conj: Los nodos son los conjuntos y los lados las funciones.

Muchas categorías se construyen tomando conjuntos especiales y funciones especiales entre estos conjuntos; los grupos, por ejemplo, forman un caso particular.

Otra familia importante de categorías se define utilizando el concepto de "funtor". Los funtores son "flechas" entre categorias y se definen de la siguiente forma:

Dadas dos categorias C; D, un funtor de fuente C y meta D es una correspondencia G que transforma nodos de C en nodos de D y flechas de C en flechas de D pero, de tal manera que se cumplan los siguientes axiomas:

(F1) La fuente de $G(\alpha)$ es la imagen por G de la fuente de α.

(F2) La meta de $G(\alpha)$ es la imagen por G de la meta de α.

(F3) La imagen de la identidad por G es la identidad de la imagen.

(F4) La imagen de una composición es la composicion de las imagenes.

Estos axiomas los podemos representar mediante diagramas asi:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] & D \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\alpha)"] & F(B) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet_A \arrow[loop above, "id_A"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet_{F(A)} \arrow[loop above, "id_{FA}=F(id_A)"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet_A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\beta\circ\alpha"'] & \bullet_B \arrow[r, "\beta"] & \bullet_C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet_{F(A)} \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[rr, bend right, "F(\beta\circ\alpha)"'] & \bullet_{F(B)} \arrow[r, "F(\beta)"] & \bullet_{F(C)} \end{tikzcd}$$

Sin entrar en detalles, puede verse que los funtores componibles se pueden componer, y que existen los funtores identidad. Esto permite considerar una estructura como la categoria de todas la categorias. Sin embargo, esto nos llevaria a una modalidad un poco extravagante de la paradoja de Russell:

> *"La categoria de todas las categorias es un elemento de ella misma"*

Como sucede siempre, esto no es sino un motivo para definir mejor las cosas, tema que no abordaremos en este artículo.

Lo que si nos interesa es el siguiente ejemplo importante:

> Si C, D son categorias, los funtores de fuente C y meta D forman tambien una categoria. En este caso, las flechas se definen asi:

Supongamos que $G, H : C \to D$ son dos funtores. Una flecha de fuente G y meta H es una correspondencia N que a cada nodo de C le hace corresponder una flecha en D de tal manera que se satisfagan los siguientes axiomas:

(AN1) La fuente de $N(A)$ es $G(A)$ y la meta $H(A)$

$$\begin{tikzcd} \bullet_A \arrow[r, "N"] & \bullet_{G(A)} \arrow[r, "N(A)"] & \bullet_{H(A)} \end{tikzcd}$$

(AN2) Si α es una flecha en $\mathcal{C}$, entonces $H(\alpha) \circ N(A) = N(B) \circ G(\alpha)$. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \bullet_{G(A)} \arrow[r, "N(A)"] \arrow[d, "G(\alpha)"'] & \bullet_{G(A)} \arrow[d, "H(\alpha)"] \\ \bullet_{G(B)} \arrow[r, "N(B)"] & \bullet_{H(B)} \end{tikzcd}$$

La sigla **AN** se utiliza porque las flechas entre funtores se llaman “Aplicaciones Naturales”.

Un ejemplo sencillo pero ilustrativo es el siguiente:

Considerese el conjunto $(\mathbb{N},\leq)$ como la categoria C. Aqui, cada número es un nodo y entre dos números n, m existe una única flecha de fuente n y meta m, si y sólo si $n \leq m$. Un dibujo de esta categoria es el siguiente:

$$\bullet_0 \longrightarrow \bullet_1 \longrightarrow \bullet_2 \longrightarrow \bullet_3 \longrightarrow \bullet \cdots$$

Este es un dibujo simplificado porque:

I. no se dibuja las flechas identidades,

II. tampoco se dibujan las compuestas. Cada uno de estos casos queda sub-entendido.

Considerese ahora como D la categoria Conj de los conjuntos. Los nodos de la categoria de los funtores de C en D se representan así:

$$\bullet_{A_0} \xrightarrow{f_0} \bullet_{A_1} \xrightarrow{f_1} \bullet_{A_2} \xrightarrow{f_2} \bullet_{A_3} \xrightarrow{f_3} \bullet \cdots$$

Estas entidades se pueden interpretar en la siguiente forma:

Si $(\mathbb{N},\leq)$ representa el tiempo, un nodo en la categoria de los funtores, es un “conjunto variable en el tiempo”, es decir, una sucesion de conjuntos ligados unos con otros, de pasado a presente, mediante funciones.

Una flecha en esta categoria de los conjuntos variables se representa así:

$$\begin{tikzcd}
\bullet^{A_0} \arrow[r] \arrow[d] & \bullet^{A_1} \arrow[r] \arrow[d] & \bullet^{A_2} \arrow[r] \arrow[d] & \bullet^{A_3} \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \cdots \arrow[d] \\
\bullet^{B_0} \arrow[r] & \bullet^{B_1} \arrow[r] & \bullet^{B_2} \arrow[r] & \bullet^{B_3} \arrow[r] & \bullet \cdots
\end{tikzcd}$$

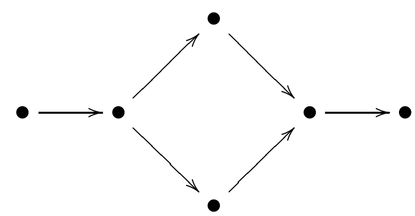
El símbolo $|||$ significa que cada cuadrito es conmutativo.

Hay que entender, en esta representación, que tambien existen otros cuadritos conmutativos como el siguiente:

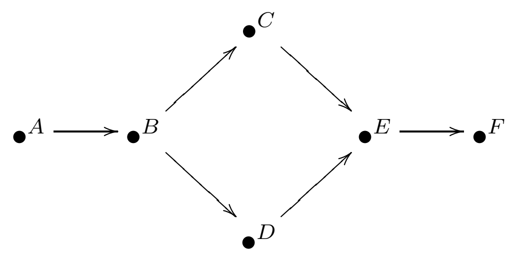
$$\begin{tikzcd}
\bullet^{A_{10}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "|||"] & \bullet^{A_{100}} \arrow[d] \\
\bullet^{B_{10}} \arrow[r] & \bullet^{B_{100}}
\end{tikzcd}$$

Este ejemplo se puede generalizar tomando, en lugar de $(\mathbb{N},\leq)$, un conjunto pre-ordenado $(X,<)$. Es decir, un conjunto con una relación binaría reflexiba y transitiva.

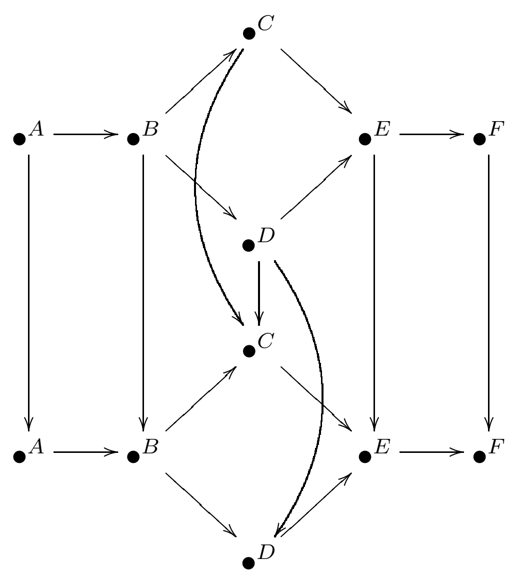
Por ejemplo, si $(X,<)$ es la estructura temporal representada mediante el dibujo:



entonces, un conjunto variable seria un sistema de conjuntos y funciones representados mediante el siguiente diagrama:



Una flecha entre dos conjuntos variables tendria una representación especial asi:



Alli, todos los cuadraditos que se forman son conmutativos.

Esta familia de categorias de “conjuntos variables” ha sido generalizada por la escuela de Alexander Grothendieck, quienes introdujeron el concepto de “Topos”. Un topos es una categoria cuyos nodos son funtores de una categoria C de cierto tipo - que representa el tiempo, o el espacio tiempo - hacia la categoria Conj de los conjuntos. En lo que sigue, llamaremos a estas categorias “Topos de Grothendieck”. Poco importa en este artículo, la definición de este concepto; lo que nos interesa es que estas categorias generalizan el concepto de "conjunto variable".

Ahora bien, siguiendo la consigna **(1)**, estas entidades se agrupan en una nueva categoria a la cual denominaremos la categoria de Grothendieck. Los nodos de esta nueva categoria son los topos de Grothendieck y los lados son funtores especiales que reciben el nombre de "morfismos geometricos". Tampoco es útil, para los propositos de este artículo, la definición de "morfismo geometrico", lo que importa es la siguiente idea:

> Un morfismo geometrico entre dos topos de Grothendieck T_1 y T_2 ,es un funtor de un cierto tipo especial.

2. La pregunta por el anillo

¿Existe el anillo?

Para responder esta pregunta debemos entender, antes que nada, lo que es un anillo. Según los libros de álgebra, los anillos son estructuras del tipo $(A, +, \bullet, 0, 1)$ donde A es un conjunto, $+$, $\bullet$ son dos operaciones binarias sobre (A) $0, 1$ dos elementos de A, de tal manera que se satisfacen las siguientes propiedades:

(AN 1) $0 \neq 1$

(AN 2) $(A, +, 0)$ es un grupo abeliano. Es decir, $+$ es una operación conmutativa, invertiva, asociativa, modulativa y 0 es el módulo.

(AN 3) $(A, , \bullet, 1)$ es un monoide. Es decir la operación $\bullet$ es asociativa y 1 es elemento neutro.

(AN 4) La operacion $\bullet$ distribuye la operación $+$ a derecha y a izquierda:

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c \qquad (a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c, \quad \text{para todo} \quad a, b, c \in A.$$

Una primera reflexión en relación con esta definición es la siguiente: es una definición conjuntista (analítica). Cabe entonces la siquiente pregunta: dada una categoría C, es posible hablar de anillos en C ? En otras palabras es posible o no definir la estructura de anillo independientemente de la categoria Conj., es decir es el concepto de anillo un concepto sintético?.

Ante todo, debemos resolver los siguientes interrogantes:

1. El concepto "operación binaria", es sintético?
2. El concepto "elemento de A" es sintético?

Y antes es necesario responder el interrogante siguiente:

3. El concepto “producto cartesiano de nodos” es definible sintéticamente?

Las respuestas afirmativas a cada uno de estos interrogantes son los siguientes:

a. Producto Cartesiano de Nodos.

Dada una categoría D y A, B dos nodos en D (que podrían ser el mismo), un producto cartesiano entre A y B, es una tripla $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ de tal manera que

(PC1) La fuente de π_A y la de π_B es $A \times B$.

(PC2) La meta de π_A es A y la de π_B es B.

(PC3) Si (C, f, g) es una tripla en la cual C es un nodo, f, g flechas de fuente C, f de meta A y $g$de meta B, entonces, existe una única flecha h de fuente C y meta $A \times B$, de tal manera que $\pi_A \circ h = f$ y $\pi_B \circ h = g$.

El siguiente dibujo ilustra la situación.

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[r, "h", "\exists!"'] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[dr, "\pi_A"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Naturalmente en la categoria $Conj$, el producto cartesiano usual junto con las proyecciones, constituye un primer ejemplo que ilustra la definición. En los Topos de Grothendieck también existen productos cartesianos.

Como es el caso de los conjuntos, si en una categoría C existen productos cartesianos de dos nodos, también existen productos cartesianos de n nodos para $n \geq 2$.

3. Operaciones n-arias en un nodo.

Si en una categoría existen productos cartesianos finitos y si A es un nodo, entonces, una operación n-aria sobre A es una flecha de dominio $A^n = A \times \cdots \times A$, n veces ($A^1 = A$) y codominio A.

3.1. Elementos de un nodo

¿Que es un punto? Analíticamente hablando, es un conjunto con un único elemento. Estos conjuntos tienen una propiedad muy particular; dado cualquier conjunto X, existe una única función de dominio X y codominio un conjunto con un solo elemento.

El siguiente dibujo caracteriza los puntos de una categoria.

$$X \xrightarrow[\exists!]{} 1$$

En otras palabras, un nodo 1 en una categoria C es un punto de C si y sólo sí, para todo nodo X en C, existe un único lado de fuente X y meta 1.

Así las cosas, si en la categoria C existe un punto 1 y si A es un nodo en C, un elemento de A es, sencillamente, una flecha de dominio 1 y codominio A. Los elementos de un nodo A se representan así

$$1 \longrightarrow A$$

Tenemos ahora todos los ingredientes para introducir "sintéticamente" la noción de anillo.

Antes que nada los "protoanillos".

Un protoanillo en una categoria C es una tupla $(A, +, *, -, 0, 1)$ tal que A es un nodo de $C, +, *$ dos operaciones binarias sobre A, $-$ una operación uno-aria sobre A y $0, 1$ dos elementos diferentes de A.

¿Como expresar, "sintéticamente", que las operaciones $+, *$ son asociativas?

En general podemos formular la asociatividad de una operación binaria b sobre un nodo B en una categoria C en la cual existen productos cartesianos afirmando que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} B \times B \times B \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \times B \arrow[d, "b"] \\ B \times B \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd}$$

u es la única flecha tal que $\pi_1 \circ u = b \circ h$ y $\pi_2 \circ u = d_B \circ t$ donde $h : B \times B \times B \to B \times B$ es la proyección respecto de $B \times B$, identificando $B \times B \times B$ con $(B \times B) \times B$ y $t : B \times B \times B \to B$ es la segunda proyección.

Por su parte, v es la única flecha tal que $\pi_1 \circ v = id_B \circ s$ y $\pi_2 \circ v = b \circ w$, donde $s : B \times B \times B$ es la primera proyección, identificando $B \times B \times B$ con $B \times (B \times B)$ y $w : B \times B \times B \to B \times B$ es la segunda proyección.

Que un elemento de un nodo B es neutro para una operación binaria b sobre B se formula, análogamente, mediante la conmutatividad de dos diagramas:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "id_B"'] & B \times B \arrow[d] & B \arrow[l, "d"'] \arrow[dl, "id_A"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$c : B \to B \times B$ es la única flecha tal que $\pi_1 \circ c = id_B$ y $\pi_2 \circ c = \text{Constante}(e)$ donde esta última es la flecha $B \to 1 \to B$. d es la única flecha tal que $\pi_1 \circ c = \text{Constante}(e)$, $\pi_2 \circ c = id_B$.

Finalmente, si $1 \xrightarrow{0} B$ es el elemento neutro de una operación binaria $+$ sobre B, la operación

$B \xrightarrow{-} B$ define el "opuesto" para $+$ si los diagramas

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "Conts(0)"'] & B \times B \arrow[d, "+"] & B \arrow[l, "m"'] \arrow[dl, "Conts(0)"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Aqui, n es la única flecha tal que $\pi_1 \circ n = id_B$, $\pi_2 \circ n = -$ y m es la única flecha tal que $\pi_1 \circ m = -$ y $\pi_2 \circ m = id_B$.

Una última ilustración.

Una operación binaria $b : A \times A \to A$ es conmutativa, si y sólo si, es conmutativo el diagrama siquiente.

$$\begin{tikzcd} B \times B \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "b"'] & & B \times B \arrow[dl, "b"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

p es la única flecha tal que $\pi_1 \circ p = \pi_2$ y $\pi_2 \circ p = \pi_1$.

Queda entonces claro que los axiomas que definen las estructuras conocidas con el nombre de anillos admiten una formulación sintética y en consecuencia, tiene sentido hablar de anillos en una categoria C en la cual existen productos cartesianos finitos y puntos.

De hecho existen anillos no solamente en la categoria de conjuntos sino, además en categorias como los conjuntos variables y los topos de Grothendieck.

El siguiente teorema, según nuestra manera de entender, es típicamente platónico:

Teorema. *Existe un topos de Grothendieck, llamado Topos de Zariski, en el cual existe un anillo $\mathcal{A}$, llamado el anillo genérico, tal que, si $\mathcal{B}$ es un anillo en un topos de Grothendieck $\mathcal{C}$, entonces, existe un morfismo geométrico $\mathcal{F}$ de dominio $\mathcal{Z}$ = Topos de Zariski y codominio $\mathcal{C}$ tal que*

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}.$$

En resumen, todo anillo $\mathcal{B}$ es un "pálido reflejo" del anillo $\mathcal{A}$. este $\mathcal{A}$ sería "el anillo".

4. Conclusiones

1. La teoría de los anillos es una teoría que tiene varias características fundamentales: es de primer orden y ecuacional.

Poco importa el significado de estas últimas expresiones. Lo importante es lo siguiente: desde el punto de vista lógico, la teoría de anillos es una teoría con caracterí sticas muy especiales y justamnente por esa razón es una teoría platónica.

En otras palabras, no todas las teorías -matemáticas claro esta- tienen caracter platónico.

De hecho, las teorias de primer orden, platónicas, han sido clasificadas y se llaman "teorias geométricas". Esto implica que las teorias de primer orden "no-geométricas" no tienen modelo generico, no son platónicas.

2. ¿Y a quien le importa si el platonismo es o no consistente?

Antes que a nadie a mi mismo. Y a todos aquellos que teniendo su propio punto de vista respetan el de los demás. De hecho nuestro artículo tiene un único propósito: respaldar lógicamente el platonismo y al mismo tiempo, respaldar lógicamente la negación del platonismo. Ambos son consistentes: Existen teorias matemáticas que no tienen modelo generico. En total, si una teoría es lógicamente consistente, es decir tiene un modelo, cualquier ser humano tiene derecho a creer en ella.